Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS TM

Mathématiques, groupement B des BTS

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (12 questions) **Page 3**

2. Séries de Fourier d'une fonction paire périodique (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btstm.fr/assets/annales/bts-tm/E2 - Mathématiques/2023/BTS TM - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2 -Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond du meuble et celui du tiroir est modélisée par une fonction du temps, exprimée en centimètres, avec le temps en secondes. L'exercice étudie l'équation différentielle du modèle, les conditions initiales, l'évolution et le temps de fermeture du tiroir, puis sa position moyenne.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. **Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.**

On factorise le trinôme en recherchant deux nombres de somme -5 et de produit 4. Ces nombres sont -1 et -4, donc $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. L'équation devient un produit nul. Chacun des deux facteurs peut alors s'annuler, ce qui donne les deux solutions réelles distinctes. On peut vérifier qu'elles ont bien pour somme -5 et pour produit 4.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les solutions sont $r = -1$ et $r = -4$.

Question 1.b. **À l'aide du tableau fourni, résoudre l'équation différentielle (E₀) : y'' + 5y' + 4y = 0.**

L'équation caractéristique associée à $y'' + 5y' + 4y = 0$ est $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses deux racines réelles distinctes sont -1 et -4. D'après le tableau fourni, lorsque les racines sont distinctes, la solution générale est une combinaison linéaire des exponentielles correspondantes. Les constantes C_1 et C_2 sont arbitraires et réelles.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. **Sachant qu'à l'instant t = 0 le point M est à 20 cm de O et se déplace vers O à la vitesse de -10 cm·s⁻¹, déduire f(0) et f'(0).**

La fonction f représente la distance OM, exprimée en centimètres. À l'instant initial, cette distance est de 20 cm : cela donne directement la valeur de $f(0)$. La vitesse du point M vers O est indiquée négative et vaut $-10\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$. Comme $f'(0)$ représente la vitesse instantanée de variation de la distance, cette donnée fournit sa valeur.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20\ \mathrm{cm}$ et $f'(0) = -10\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$.

Question 2.b. **En admettant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

La distance demandée correspond à la valeur de la fonction à l'instant $t = 2$. On remplace donc t par 2 dans l'expression admise : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. Cette expression est la valeur exacte. Son évaluation donne environ 3,16 cm, ce qui constitue seulement une valeur approchée de la distance.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$OM(2) = \dfrac{70}{3}e^{-2} - \dfrac{10}{3}e^{-8}\ \text{cm} \approx 3{,}16\ \text{cm}.$

Question 2.c. **Le tiroir est considéré comme fermé lorsque OM est inférieure à 0,5 cm. Vérifier si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir se ferme en moins de 4 secondes et justifier.**

À 4 secondes, $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}427$ cm, donc la distance est inférieure au seuil de 0,5 cm. De plus, $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t} < 0$, car $40e^{-4t} < 70e^{-t}$ pour $t \geq 0$. La distance décroît donc et le seuil a été franchi avant 4 secondes.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Oui, le tiroir se ferme en moins de 4 secondes.

Partie B. Étude de fonction

Question 1.a. **En utilisant la limite rappelée pour e⁻ᵘ lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

La fonction est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, les exposants $-t$ et $-4t$ tendent vers $-\infty$. Ainsi, les deux exponentielles tendent vers 0. Chaque terme de l'expression de $f(t)$ tend donc vers 0, et leur différence tend également vers 0.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0.$

Question 1.b. **Déduire de cette limite que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ est égale à 0. Par définition, si une fonction tend vers une valeur finie L en $+\infty$, sa courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = L$. Ici, la droite correspondante est donc l'axe des abscisses.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe admet l'asymptote horizontale $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t de l'intervalle [0 ; +∞[.

On dérive séparément les deux termes de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Par la règle de dérivation d'une composée, $(e^{-t})' = -e^{-t}$ et $(e^{-4t})' = -4e^{-4t}$. Le second terme comporte déjà un signe moins, qui devient donc un signe plus après dérivation. On obtient ainsi l'expression de $f'(t)$ sur tout l'intervalle considéré.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}.$$

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

On sait que $f'(t) < 0$ sur $[0; +\infty[$, donc f est strictement décroissante sur cet intervalle. Sa valeur initiale est $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$, et sa limite en $+\infty$ est 0. Le tableau de variations traduit cette décroissance vers la limite.

t	0	$\longrightarrow$	$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	20	$\searrow$	0

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est strictement décroissante de 20 vers 0.

Question 3.a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne 36, en ajoutant des lignes si nécessaire jusqu'à l'arrêt. Indiquer t, la valeur de f(t) arrondie au centième et le résultat du test de la condition à chaque ligne demandée.

La boucle augmente t de 0,1 seconde tant que $f(t) > 0{,}5$. Les valeurs du tableau sont arrondies au centième, tandis que le test porte sur la valeur de la fonction. À 3,8 secondes, la condition est encore vraie. À 3,9 secondes, la distance passe sous le seuil et la condition devient fausse : l'algorithme s'arrête alors.

Ligne	**t (s)**	**$f(t)$ (cm), au centième**	**Condition $f(t) > 0{,}5$**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

La ligne 39 est la dernière : le test y devient faux pour $t = 3{,}9$.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

À 3,8 secondes, la distance vaut environ 0,52 cm : elle dépasse encore le seuil, et la boucle ajoute un pas de 0,1 seconde. On obtient alors $t = 3{,}9$. À cet instant, la distance vaut environ 0,47 cm, donc la condition du « tant que » n'est plus vérifiée. La variable conserve cette valeur finale lorsque l'algorithme s'arrête.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3{,}9\ \text{s}$: le tiroir a atteint le seuil de fermeture.

Question 4. La position moyenne du tiroir est définie par m = 1/4 ∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

On intègre chaque terme de f sur $[0;4]$, puis on divise le résultat par 4 :

$$m = \frac{1}{4}\left[\frac{70}{3}(1 - e^{-4}) - \frac{5}{6}(1 - e^{-16})\right].$$

Le terme constant vaut $\frac{1}{4}(\frac{70}{3} - \frac{5}{6}) = \frac{45}{8}$. Les termes exponentiels donnent respectivement $-\frac{35}{6}e^{-4}$ et $\frac{5}{24}e^{-16}$, d'où l'expression demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}.$$

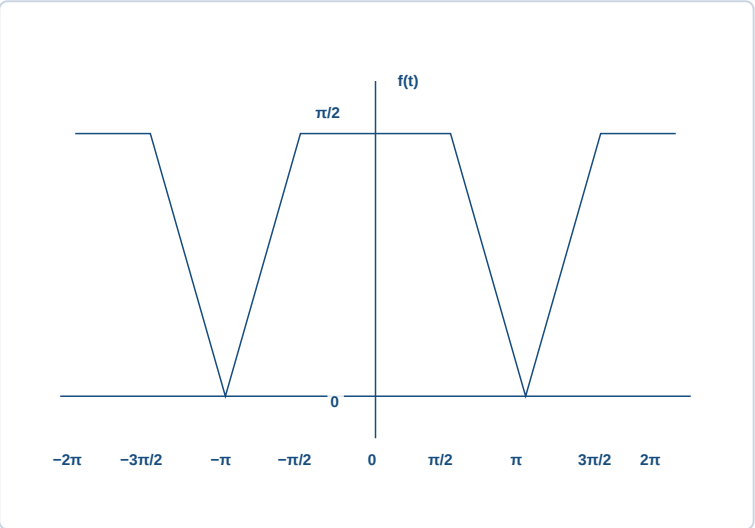
2. Séries de Fourier d'une fonction paire périodique

L'exercice porte sur une fonction paire de période 2π, définie par morceaux sur [0 ; π] et représentée sur plusieurs périodes. Il mobilise les coefficients de Fourier, la somme partielle d'ordre 3, l'identification de sa courbe et l'estimation de l'erreur d'une approximation de la valeur efficace au carré.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [-2π ; 2π].

La fonction est paire et de période 2π. Elle vaut $\pi/2$ sur les intervalles autour des multiples de 2π, puis décroît ou croît linéairement jusqu'à zéro aux multiples impairs de π. Le tracé ci-dessous respecte ces paliers et ces rampes sur tout l'intervalle demandé.

Graphe de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Graphe de f sur $[-2\pi; 2\pi]$: voir le tracé.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

Le formulaire donne $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$. L'intégrande est 2π-périodique, donc cette intégrale est égale à celle sur $[-\pi;\pi]$. Comme f est paire et $\sin(nt)$ est impaire, leur produit est impair. L'intégrale sur cet intervalle symétrique est nulle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. **Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.**

La période de la fonction est $T = 2\pi$. Le formulaire associe à une fonction périodique la pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$. En substituant la période donnée, on obtient $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. Les termes trigonométriques de la série sont donc de la forme $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\omega = 1$.

Question 4. **Démontrer que le coefficient constant de Fourier a₀ vaut 3π/8.**

Sur une période, on peut intégrer de $-\pi$ à π. La parité donne alors $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$. Sur $[0;\pi/2]$, $f(t) = \pi/2$, et sur $[\pi/2;\pi]$, $f(t) = \pi - t$. Ainsi, l'intégrale vaut $\pi^2/4 + \pi^2/8 = 3\pi^2/8$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. **Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, aₙ = ∫₀^(π/2) cos(nt)dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π - t)cos(nt)dt.**

Pour une fonction paire, le formulaire donne $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$. Avec $T = 2\pi$ et $\omega = 1$, cela devient $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. On sépare à $\pi/2$, où change l'expression de f, puis on remplace chacune par sa définition.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$.

Question 6. **En admettant que aₙ = 2/(πn²)[cos(nπ/2) - cos(nπ)], déterminer les valeurs exactes de a₁, a₂ et a₃.**

On applique la formule admise à chaque rang. Pour $n = 1$ et $n = 3$, le cosinus du premier angle vaut 0 et celui du second vaut -1. Pour $n = 2$, ces cosinus valent respectivement -1 et 1. Le facteur $1/n^2$ donne les valeurs exactes ci-dessous.

Coefficient	Valeur exacte
a_1	$\frac{2}{\pi}$
a_2	$-\frac{1}{\pi}$
a_3	$\frac{2}{9\pi}$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1 = \frac{2}{\pi}$, $a_2 = -\frac{1}{\pi}$, $a_3 = \frac{2}{9\pi}$.

Question 7. **Déduire l'expression de la somme partielle $s_3(t) = 3\pi/8 + (2/\pi)\cos(t) - (1/\pi)\cos(2t) + (2/(9\pi))\cos(3t)$.**

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$, puisque $\omega = 1$. On utilise les résultats précédents : tous les coefficients b_n sont nuls, et les coefficients a_0, a_1, a_2, a_3 sont connus. Leur substitution fournit directement l'expression demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t)$.

Question 8. **Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées correspond à la fonction s_3.**

La somme partielle comporte trois termes cosinus et présente un maximum en $t = 0$, puis un minimum près de $t = \pi$. Parmi les trois propositions de la page suivante, la courbe numéro 2 a cette allure lisse et périodique. La courbe numéro 3 conserve davantage les paliers de la fonction initiale.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe numéro 2.

Question 9.a. **Pour $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.**

On remplace les coefficients par leurs valeurs exactes dans la définition de P. Le carré de a_0 donne $9\pi^2/64$. La somme des trois autres carrés, multipliée par $1/2$, donne $409/(162\pi^2)$. L'évaluation de cette expression, arrondie à quatre décimales, donne le résultat ci-dessous.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P \approx 1{,}6437$.

Question 9.b. **Sachant que F est la valeur efficace de f, que $F^2 = \pi^2/6$ et que P approche F^2, choisir le pourcentage d'erreur parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Une seule réponse est attendue, sans justification.**

Le pourcentage d'erreur se calcule par $\frac{|F^2 - P|}{F^2} \times 100$. En utilisant $F^2 = \pi^2/6$ et la valeur non arrondie de P, on obtient environ $0{,}074\%$. Parmi les trois choix proposés, la valeur correspondante est $0{,}1\%$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

0,1%.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, se déroule en session 2023 sous le code 23MATGRB2 et dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 ou 2 selon la spécialité. Ses deux exercices de 10 points étudient la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et analyse de fonction, puis les séries de Fourier d'une fonction paire et l'approximation de sa valeur efficace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $ay'' + by' + cy = 0$, les solutions se déterminent à partir des racines de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$.
- La vitesse du point M est $f'(t)$; si $f'(t) < 0$, la distance OM diminue.
- La pulsation vaut $\omega = 2\pi/T$; si f est paire, ses coefficients sinus b_n sont nuls.
- Pour une fonction paire, $a_n = (4/T)\int_0^{(T/2)} f(t)\cos(n\omega t)dt$, pour $n \geq 1$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités du modèle : f(t) est en centimètres et t en secondes.
- Distinguer la distance initiale f(0) de la vitesse initiale f'(0), dont l'unité est le $cm \cdot s^{-1}$.
- Dans l'algorithme, incrémenter t de 0,1 et tester la condition à chaque étape jusqu'à ce qu'elle soit fausse.
- Pour Fourier, exploiter la parité et la période, puis respecter les formules et les arrondis demandés.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment utiliser les conditions initiales dans l'exercice du tiroir ?

La distance initiale entre O et M donne f(0) en centimètres. La vitesse initiale correspond à f'(0), en centimètres par seconde ; son signe négatif indique que la distance diminue lorsque le tiroir se rapproche du meuble.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice de Fourier ?

La fonction f est paire, tandis que $\sin(n\omega t)$ est impaire. Leur produit est donc impair. L'intégrale de ce produit sur une période centrée en zéro est nulle, ce qui entraîne l'annulation des coefficients b_n.

Q : Combien de temps dure l'épreuve et comment répartir le travail ?

L'épreuve dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points. Répartissez le temps entre les deux thèmes, puis gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités, les arrondis et les réponses reportées.

Q : Quelles consignes de réponse particulières faut-il respecter ?

Les questions qui demandent de démontrer exigent une justification. Pour la question 8, il faut seulement identifier la courbe, sans justification. Pour la question 9.b, une seule proposition est à recopier et aucune justification n'est demandée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btstm.fr/assets/annales/bts-tm/E2 - Mathématiques/2023/BTS TM - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Traitements des Matériaux : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.