Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22-MATGRD1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Analyses de biologie médicale : 1 ; Bio analyses et contrôles : 2 ; Biotechnologies : 1 ; Europlastics et composites : 1,5 ; Bioqualité : 2**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical (13 questions) **Page 3**

2. Probabilités, pannes et contrôle de la qualité d'une machine à embouteiller (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btstm.fr/assets/annales/bts-tm/E2 - Mathématiques/2022/BTS TM - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3 -Sujet.pdf

1. Modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical

Dans un pays de 60 millions d'habitants, le nombre de personnes équipées d'un implant médical est étudié à partir de données annuelles depuis 2013. Deux modèles sont examinés : un ajustement exponentiel des données et une fonction définie à partir d'une équation différentielle.

Partie A

Question 1. Compléter le tableau de l'annexe à rendre avec la copie en calculant les valeurs de y = ln(N - 30), arrondies au millième.

Pour chaque valeur, on calcule $y_i = \ln(N_i - 30)$, avec N_i en milliers. Par exemple, pour 2013 : $\ln(56,25 - 30) \approx 3,268$. Les valeurs arrondies au millième sont :

Rang k_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	3,268	3,336	3,418	3,497	3,578	3,656	3,738	3,818	3,898

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$3,268;\ 3,336;\ 3,418;\ 3,497;\ 3,578;\ 3,656;\ 3,738;\ 3,818;\ 3,898$

Question 2.a. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'équation de la droite d'ajustement du nuage de points $M_i(k_i ; y_i)$ par la méthode des moindres carrés, sous la forme y = ak + b, avec a et b arrondis au centième.

La régression linéaire des neuf couples $(k_i ; y_i)$, avec $k_i = 0, \ldots, 8$, donne une pente d'environ $0,0794$ et une ordonnée à l'origine d'environ $3,2606$. Arrondis au centième, ces coefficients valent $0,08$ et $3,26$. La droite ajuste les valeurs transformées y_i, et non directement les nombres de personnes.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$y = 0,08k + 3,26$

Question 2.b. À partir de l'équation de la droite d'ajustement, déduire que le nombre de personnes équipées de l'implant, exprimé en milliers, peut être modélisé en fonction du rang k par N(k) = 30 + 26,05e^(0,08k).

Comme $y = \ln(N - 30)$, la droite d'ajustement donne $N - 30 = e^{0,08k+3,26} = e^{3,26}e^{0,08k}$. Or $e^{3,26} \approx 26,05$ au centième. On obtient ainsi le modèle demandé, avec N exprimé en milliers de personnes.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$N(k) = 30 + 26,05e^{0,08k}$, en milliers.

Question 3.a. **En supposant que le modèle reste valide, déterminer au millier près le nombre de personnes équipées de l'implant en 2026.**

Le rang de 2026 est $k = 2026 - 2013 = 13$. Le modèle donne $N(13) = 30 + 26,05e^{0,08\times 13} \approx 103,70$. Cette valeur est en milliers de personnes ; on l'arrondit donc au millier près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> En 2026, environ 104 000 personnes.

Question 3.b. **En supposant que le nombre d'habitants du pays reste stable à long terme, déterminer si le modèle de la partie A reste valide à long terme et justifier la réponse.**

Quand $k \to +\infty$, $e^{0,08k} \to +\infty$. Le modèle prévoit donc une augmentation sans limite du nombre de personnes équipées. Or la population reste stable à 60 millions : le nombre prévu finirait par dépasser le nombre d'habitants. Le modèle ne peut donc pas rester valide à long terme.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le modèle dépasserait à terme les 60 millions d'habitants.

Partie B

Question 1.a. **Résoudre sur l'intervalle [0 ; +∞[l'équation différentielle homogène (E_0) : y' + 0,05y = 0.**

L'équation homogène $y' + 0,05y = 0$ est de la forme $y' + ay = 0$, dont les solutions sont $y(t) = Ce^{-at}$, où C est une constante réelle. Ici, $a = 0,05$, ce qui donne la famille des solutions sur l'intervalle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. **Déterminer une solution constante de l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

Pour une solution constante $y(t) = c$, la dérivée est nulle. L'équation devient $0,05c = 0,05$, donc $c = 1$. Cette valeur fournit une solution particulière constante de (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution constante est $y(t) = 1$.

Question 1.c. **Résoudre sur l'intervalle [0 ; +∞[l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

La solution générale de (E) est la somme d'une solution particulière, ici la constante 1, et de la solution générale de l'équation homogène associée, $Ce^{-0{,}05t}$. Cela donne toutes les solutions sur $[0;+\infty[$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 1 + Ce^{-0{,}05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.d. **Sachant que g(0) = 8, en déduire une expression de la fonction g sur [0 ; +∞[.**

Dans $g(t) = 1 + Ce^{-0{,}05t}$, la condition $g(0) = 8$ donne $1 + C = 8$, car $e^0 = 1$. Ainsi, $C = 7$, ce qui détermine l'expression de g.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 1 + 7e^{-0{,}05t}$, pour $t \geq 0$.

Question 2. **Avec le modèle f(t) = 450/(1 + 7e^(-0,05t)), où f(t) est exprimée en milliers et t en années depuis 2013, déterminer au millier près le nombre de personnes équipées de l'implant en 2026.**

Entre 2013 et 2026, il s'écoule $t = 2026 - 2013 = 13$ ans. Alors $f(13) = \dfrac{450}{1 + 7e^{-0{,}05 \times 13}} \approx 96{,}69$. Comme $f(t)$ est exprimée en milliers, l'arrondi demandé au millier près donne le nombre recherché.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> En 2026, environ 97 000 personnes.

Question 3. **Déterminer la limite de f en +∞ et interpréter le résultat dans le contexte de l'évolution du nombre de personnes équipées de l'implant.**

Quand $t \to +\infty$, $e^{-0{,}05t} \to 0$. Le dénominateur $1 + 7e^{-0{,}05t}$ tend donc vers 1, et le numérateur reste égal à 450. La limite, exprimée en milliers de personnes, indique le niveau vers lequel le modèle prévoit que le nombre d'équipés se stabilise.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 450$: le modèle tend vers 450 000 personnes équipées.

Question 4. **À partir de l'expression de f'(t) fournie, déterminer le sens de variation de f sur [0 ; +∞[et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.**

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,05t} > 0$. Dans l'expression fournie, $f'(t) = \dfrac{315e^{-0,05t}}{2(1+7e^{-0,05t})^2}$, le numérateur et le dénominateur sont donc strictement positifs. Ainsi $f'(t) > 0$ sur l'intervalle, et le nombre d'équipés augmente selon ce modèle.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est strictement croissante : le nombre d'équipés augmente.

Question 5. **Déterminer à partir de quelle année le nombre de personnes équipées de l'implant dépassera 120 000, soit 120 milliers, et expliquer la méthode employée.**

Résoudre $f(t) > 120$ revient à résoudre $e^{-0,05t} < 2,75/7$, puisque le dénominateur est positif. On obtient $t > -\ln(2,75/7)/0,05 \approx 18,69$. Le temps étant compté depuis 2013, le seuil est dépassé au cours de l'année 2032.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le nombre dépassera 120 000 personnes à partir de 2032.

2. Probabilités, pannes et contrôle de la qualité d'une machine à embouteiller

Dans une usine, une machine à embouteiller est alimentée par un réservoir d'eau et une file de bouteilles vides, et peut connaître des défauts d'approvisionnement ou des pannes. Un laboratoire contrôle le volume d'eau des bouteilles pour évaluer le réglage de la machine à partir d'un échantillon.

Partie A - Défaut d'approvisionnement

Question 1. **Associer chaque phrase à l'information correspondante du tableau : probabilité que la file ne se vide pas dans la journée ; événement où la file est vide au moins une fois mais pas le réservoir ; probabilité que la file et le réservoir aient été vides au moins une fois ; probabilité d'un défaut d'approvisionnement. Pour chacune des quatre réponses, écrire le numéro de la phrase et la lettre correspondante, sans justification.**

La probabilité que la file ne se vide pas est le complément de $P(A)$. L'événement « file vide, mais pas le réservoir » est $A \cap \overline{B}$. Par indépendance, $P(A \cap B) = 0{,}03 \times 0{,}02 = 0{,}0006$, puis $P(A \cup B) = 0{,}03 + 0{,}02 - 0{,}0006 = 0{,}0494$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> 1-E ; 2-C ; 3-F ; 4-D.

Partie B - Pannes de la machine à embouteiller

Question 1. **Identifier, sans justifier, la loi de probabilité suivie par X, le nombre de jours où la machine tombe en panne au cours d'une période de 200 jours, et préciser ses paramètres.**

Chaque jour constitue une épreuve de Bernoulli indépendante, avec une probabilité de panne de $0{,}025$. Le nombre de jours de panne sur 200 jours suit donc une loi binomiale, de paramètres égaux au nombre de jours et à la probabilité quotidienne de panne.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(200\,;\,0{,}025)$.

Partie B - Approximation par une loi de Poisson

Question 2.a. **Sachant que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre λ, justifier que λ = 5.**

Pour approcher la loi binomiale par une loi de Poisson, le paramètre vaut le produit du nombre de jours et de la probabilité quotidienne de panne : $\lambda = np = 200 \times 0{,}025 = 5$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\lambda = 5$.

Question 2.b. **Pour Y suivant la loi de Poisson de paramètre λ, donner la valeur de P(Y ≤ 10) arrondie à 10^{-3} près.**

Pour $Y \sim \mathcal{P}(5)$, la probabilité demandée est la somme des probabilités pour les valeurs entières de 0 à 10 : $P(Y \leq 10) = e^{-5} \sum_{k=0}^{10} \frac{5^k}{k!}$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(Y \leq 10) \approx 0{,}986$.

Question 2.c. **Le graphique suggère que P(Y = 15) est égale à 0. À l'aide de la formule fournie pour P(Y = k), déterminer si cette conjecture est vraie ou fausse et justifier.**

La formule de la loi de Poisson donne, pour $k = 15$, $P(Y = 15) = \frac{5^{15} e^{-5}}{15!}$. Cette valeur est strictement positive, même si elle est trop faible pour être visible sur le graphique.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

La conjecture est fausse : $P(Y = 15) \approx 0{,}000157 > 0$.

Partie C - Qualité de l'embouteillement

Question 1. **À partir des volumes mesurés et de leurs effectifs pour l'échantillon de 100 bouteilles, déterminer à la calculatrice la moyenne x̄ et l'écart type σ de l'échantillon. Arrondir l'écart type à 10^{-2} près.**

La moyenne pondérée des mesures est $\bar{x} = \frac{73 \times 17 + 74 \times 20 + 75 \times 43 + 76 \times 13 + 77 \times 7}{100} = 74{,}73$ cL. L'écart type de l'échantillon se calcule en pondérant les carrés des écarts à cette moyenne par les effectifs, puis en prenant la racine carrée.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\bar{x} = 74{,}73$ cL ; $\sigma \approx 1{,}10$ cL.

Partie C - Test bilatéral

Question 2.a. Sous l'hypothèse H_0 : m = 75, la moyenne Z des volumes d'un échantillon de 100 bouteilles suit une loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,11. Déterminer un nombre réel h tel que P(75 - h ≤ Z ≤ 75 + h) soit égal à 0,95 à 10^{-2} près.

Sous H_0, l'intervalle central à 95 % d'une loi normale a pour demi-largeur $h \approx 1{,}96 \times 0{,}11 = 0{,}2156$ cL. À 10^{-2} près, cela donne $h = 0{,}22$ cL.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $h \approx 0{,}22$ cL.

Question 2.b. Énoncer la règle de décision du test bilatéral de H_0 : m = 75 contre H_1 : m ≠ 75 au seuil de confiance de 95 %.

On compare la moyenne observée à l'intervalle central de 95 % sous H_0, soit $[75 - 0{,}22\,;\,75 + 0{,}22]$. Si elle appartient à cet intervalle, on accepte H_0 ; si elle est à l'extérieur, on rejette H_0.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Accepter H_0 si $\bar{x} \in [74{,}78\,;\,75{,}22]$ cL ; sinon, la rejeter.

Question 2.c. À partir des résultats de l'échantillon fourni, déterminer si l'hypothèse H_0 : m = 75 peut être acceptée.

La moyenne observée est $74{,}73$ cL, donc inférieure à la borne basse de l'intervalle d'acceptation, $74{,}78$ cL. Elle n'appartient pas à l'intervalle de décision.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> On rejette H_0.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, groupement D1, session 2022, code 22-MATGRD1, dure 2 heures et son coefficient dépend de la spécialité, de 1 à 2. Elle comporte deux exercices de 10 points : la modélisation de l'équipement en implant médical, puis les probabilités de panne et le contrôle du volume d'embouteillage. Les compétences évaluées couvrent ajustement, équations différentielles, lois de probabilité et test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Avec $y = \ln(N - 30)$, un ajustement $y = ak + b$ conduit au modèle $N(k) = 30 + e^{b}e^{ak}$.
- Pour $y' + ay = c$, la solution générale est la somme d'une solution constante c/a et de la solution générale de l'équation homogène.
- Pour n essais indépendants de probabilité p, le nombre de succès suit $B(n ; p)$; l'approximation de Poisson utilise $\lambda = np$.
- Un test bilatéral à 95 % compare la moyenne observée à l'intervalle central de probabilité 0,95 sous l'hypothèse nulle.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : les nombres de personnes sont exprimés en milliers et t est compté en années depuis 2013.
- Pour les événements indépendants, distinguer intersection, complémentaire et réunion avant de choisir la probabilité.
- Une probabilité de Poisson reste strictement positive pour tout entier k, même si le graphique paraît indiquer zéro.
- Calculer la moyenne de l'échantillon à partir des effectifs, puis appliquer la règle du test à cette moyenne.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment passer de l'ajustement linéaire à un modèle exponentiel ?

Après le changement $y = \ln(N - 30)$, remplacer y par $ak + b$. On obtient $\ln(N - 30) = ak + b$, donc $N = 30 + e^{b}e^{ak}$. Il faut conserver les unités et respecter les arrondis demandés.

Q : Comment choisir le paramètre de l'approximation de Poisson pour les pannes ?

Le nombre de jours de panne suit une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,025$. Pour son approximation de Poisson, calculer $\lambda = np$, soit le produit des deux paramètres.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Le sujet comporte deux exercices de 10 points et autorise une calculatrice en mode examen ou une calculatrice sans mémoire de type collège. Répartir le temps entre les exercices et réserver un moment pour vérifier les unités et arrondis.

Q : Comment décider si l'hypothèse nulle est acceptée dans le test ?

Sous H_0, déterminer l'intervalle central de probabilité 0,95 pour la moyenne Z. Si la moyenne observée appartient à cet intervalle, le test ne conduit pas à rejeter H_0 ; sinon, H_0 est rejetée au seuil retenu.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btstm.fr/assets/annales/bts-tm/E2 - Mathématiques/2022/BTS TM - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Traitements des Matériaux : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.