Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot : équation différentielle, étude de fonction et développement limité (12 questions) **Page 3**

2. Système électrique entrée-sortie et transformations de Laplace (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btstm.fr/assets/annales/bts-tm/E2 - Mathématiques/2022/BTS TM - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2 -Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot : équation différentielle, étude de fonction et développement limité

Un chariot de fête foraine, lancé à 20 m/s, est ralenti par un système de freinage et sa vitesse est modélisée par une fonction f. Les questions portent sur l'équation différentielle associée, l'évolution de la vitesse, la distance parcourue et l'étude locale de la courbe.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré.

La formule du sujet donne les solutions de l'équation homogène sous la forme $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, le coefficient vaut $a = 0,8$. On remplace donc a par $0,8$. Comme aucune condition initiale n'est imposée, la constante k reste arbitraire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = 5 est solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

1. La fonction $g(t) = 5$ est constante, donc $g'(t) = 0$.
2. En substituant g dans le membre de gauche, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$.
3. Ce résultat étant égal au second membre de l'équation différentielle, la fonction constante proposée est bien une solution.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g'(t) + 0,8g(t) = 4$: $g(t) = 5$ est solution.

Question 1.c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de l'équation complète. Toute autre solution s'obtient en lui ajoutant une solution de l'équation homogène associée, déterminée à la question précédente. L'ensemble des solutions dépend donc d'une constante réelle arbitraire, sans condition initiale à appliquer à cette étape.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. **Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

1. La solution générale de l'équation est $f(t) = ke^{-0,8t} + 5$.
2. À l'instant initial, $e^0 = 1$, donc la condition impose $f(0) = k + 5 = 20$, d'où $k = 20 - 5 = 15$.
3. En remplaçant la constante dans la solution générale, on obtient la fonction qui vérifie l'équation différentielle et la condition initiale demandées.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. **Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ vaut 5.**

On utilise l'expression donnée dans la partie B : $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$. L'exponentielle tend alors vers zéro, et son produit par 15 aussi. La limite de $f(t)$ est donc celle du terme constant restant.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. **Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.**

La fonction vérifie $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$. Une limite finie en $+\infty$ signifie que la courbe représentative se rapproche d'une droite horizontale dont l'ordonnée est cette limite. Ainsi, l'asymptote horizontale de C est la droite d'équation $y = 5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale de C : $y = 5$.

Question 2. **À partir de l'expression donnée de f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.**

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est positive. L'expression donnée de la dérivée est donc strictement négative sur l'intervalle, ce qui établit que f décroît. De plus, $f(0) = 20$ et la limite en $+\infty$ vaut 5.

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

La vitesse est $f(t) = 15e^{-0{,}8t} + 5$. Comme l'exponentielle est strictement positive pour tout instant fini, la vitesse est toujours supérieure à 5 m·s^{-1}. Elle ne peut donc jamais atteindre zéro.

- La vitesse diminue au cours du temps.
- Elle tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, sans atteindre cette valeur.
- Le chariot ne s'arrête pas selon ce modèle.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse reste strictement supérieure à $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Question 4.a. **Vérifier que F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

1. On dérive $F(t) = -18,75e^{-0{,}8t} + 5t$.
2. Par dérivation de l'exponentielle composée, $F'(t) = -18,75 \times (-0,8)e^{-0{,}8t} + 5$.
3. Le coefficient exponentiel vaut $18,75 \times 0,8 = 15$. Ainsi, $F'(t) = 15e^{-0{,}8t} + 5 = f(t)$, ce qui vérifie que F est une primitive de f.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = 15e^{-0{,}8t} + 5 = f(t)$.

Question 4.b. **Calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre t = 0 et t = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance est l'intégrale de la vitesse entre 0 et 1, donc $d = F(1) - F(0)$. En utilisant la primitive donnée, $d = (-18,75e^{-0{,}8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0{,}8}$. Cette expression est exacte en mètres. Son évaluation, arrondie au centimètre comme demandé, donne la distance parcourue pendant la première seconde.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0{,}8}\ \mathrm{m} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro parmi les propositions. Une seule réponse est exacte, aucune justification n'est demandée.

Le polynôme de Taylor affiché est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$, soit $20 - 12t + 4,8t^2$. Au second ordre, le reste s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Parmi les propositions du sujet, il faut donc retenir celle qui conserve ces coefficients et ce reste.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Troisième proposition : $20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)t$. On lit dans l'énoncé que $f(0) = 20$, et la dérivée fournie donne $f'(0) = -12e^0 = -12$. La tangente passe donc par le point $(0; 20)$ et son coefficient directeur est -12. En remplaçant dans l'équation, on obtient son expression.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Système électrique entrée-sortie et transformations de Laplace

Un système électrique causal reçoit le signal e(t) = 2U(t) - U(t - 1) et sa fonction de transfert est H(p) = 1/(p + 1). Il faut représenter le signal d'entrée, déterminer le signal de sortie à l'aide des transformations de Laplace, puis étudier sa valeur en t = 1, sa courbe et sa limite.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

Comme $U(t) = 0$ pour $t < 0$, le signal vaut 0 avant l'activation. À partir de $t = 0$, le terme $2U(t)$ donne le niveau 2. À $t = 1$, $U(t - 1)$ vaut 1 et le signal descend au niveau 1. Les deux instants de saut sont donc 0 et 1, avec les niveaux indiqués sur le schéma.

Courbe en paliers du signal d'entrée e(t)

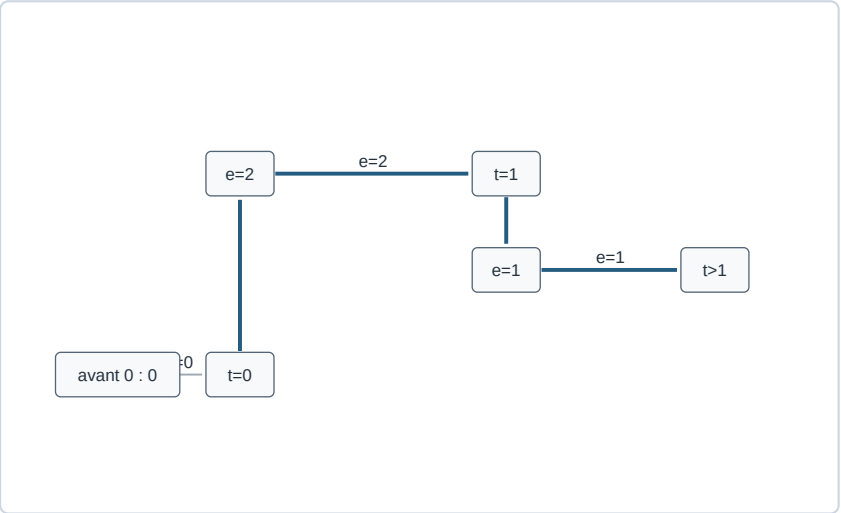


Schéma des paliers et des sauts en t=0 et t=1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ si $t < 0$, $e(t) = 2$ si $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée.

La transformée de Laplace est linéaire. Le formulaire donne $\mathcal{L}\{U(t)\} = 1/p$ et $\mathcal{L}\{U(t-a)\} = e^{-ap}/p$. Pour le retard d'une unité, on prend $a = 1$. On transforme séparément les deux termes de $e(t) = 2U(t) - U(t-1)$, puis on conserve leurs coefficients et le signe moins.

Ainsi, le terme non retardé apporte $2/p$, et le terme retardé apporte e^{-p}/p.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/(p(p + 1))]e^(-p).

La relation entrée-sortie est $S(p) = H(p)E(p)$. D'après la question précédente, $E(p) = \dfrac{2 - e^{-p}}{p}$, et l'énoncé donne $H(p) = \dfrac{1}{p+1}$. On multiplie ces expressions, puis on distribue le numérateur sur le dénominateur commun. Le terme contenant e^{-p} traduit le retard d'une unité du second échelon.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

Pour vérifier l'égalité, on met les deux fractions du membre de droite au même dénominateur. Le numérateur devient $(p+1) - p = 1$, ce qui donne le membre de gauche. L'égalité est valable pour les valeurs de p telles que les dénominateurs ne s'annulent pas. Cette décomposition en fractions simples servira à retrouver les fonctions avant et après retard.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de e^(-p)/p et de e^(-p)/(p + 1).

Les deux premières correspondances se lisent directement dans le formulaire : $1/p$ est la transformée de l'échelon, et $1/(p+1)$ celle de $e^{-t}U(t)$. La multiplication par e^{-p} applique ensuite un retard d'une unité : on remplace t par $t-1$ et on multiplie par $U(t-1)$.

- $1/p$: $U(t)$.
- $1/(p+1)$: $e^{-t}U(t)$.
- Les deux termes en e^{-p} sont leurs versions retardées.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\mathcal{L}^{-1}(1/p) = U(t)$, $\mathcal{L}^{-1}(1/(p+1)) = e^{-t}U(t)$, $\mathcal{L}^{-1}(e^{-p}/p) = U(t-1)$, $\mathcal{L}^{-1}(e^{-p}/(p+1)) = e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. **En déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.**

En utilisant la décomposition de la question 2, on écrit $S(p) = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) - e^{-p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$. Pour $0 \leq t < 1$, les fonctions retardées contiennent $U(t-1) = 0$: elles ne contribuent donc pas. Il reste $2(U(t) - e^{-t}U(t))$, et sur cet intervalle $U(t) = 1$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. **Sachant que s(t) = (e - 2)e^(-t) + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), d'abord sous forme exacte puis sous forme approchée au dixième.**

On évalue en $t = 1$ la formule valable pour $t \geq 1$: $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$. Comme $e^{-1} = 1/e$, cela se simplifie en $2 - 2/e$. Numériquement, cette valeur est environ $1{,}2642$, qui s'arrondit au dixième à $1{,}3$. Elle coïncide avec la limite de la formule de la question 4 en $t = 1$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(1) = 2 - \frac{2}{e} \approx 1{,}3$.

Question 5.b. **Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.**

Sur $[0;1[$, la formule $2(1 - e^{-t})$ croît de 0 à $2 - 2/e$. À $t = 1$, la formule donnée pour la suite prend la même valeur : les deux branches se raccordent. Pour $t \geq 1$, le coefficient $e - 2$ est positif et e^{-t} décroît ; la branche descend donc vers 1. Le schéma montre cette évolution et l'asymptote horizontale.

Courbe du signal de sortie s(t)

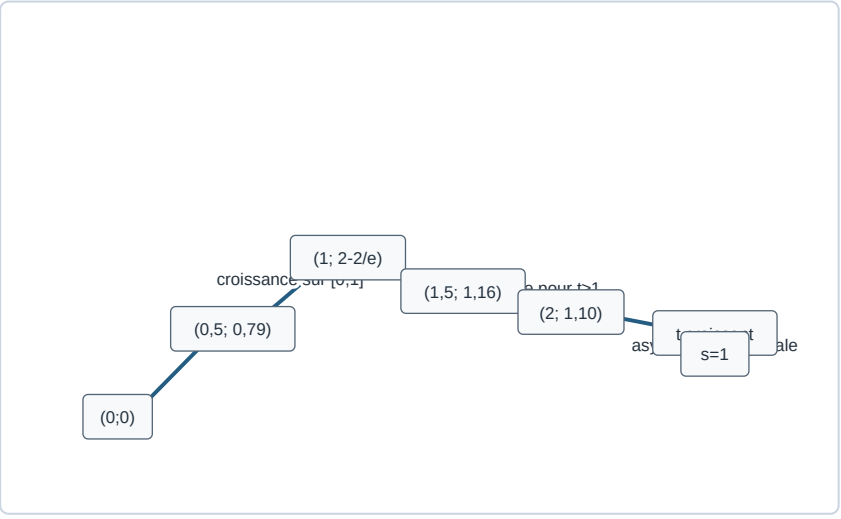


Schéma qualitatif : raccordement en t=1 et approche de s=1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe croît de $(0;0)$ à $(1;2-2/e)$, puis décroît vers l'asymptote $s=1$.

Question 5.c. Donner la limite de la fonction s(t) en +∞.

Pour $t \geq 1$, l'énoncé donne $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Le facteur $e-2$ est constant, tandis que e^{-t} tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Le produit tend donc vers 0, et le terme constant reste égal à 1. La limite est aussi la valeur de l'asymptote horizontale de la courbe.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, code 22MATGRB2, durée deux heures. Coefficient 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et 2 en Électrotechnique. Le sujet étudie le freinage d'un chariot et un système électrique, mobilisant équations différentielles, étude de fonctions, intégrales, développement limité et transformations de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, on ajoute une solution particulière aux solutions de l'équation homogène pour obtenir la solution générale.
- Si f(t) tend vers L quand t tend vers +∞, la courbe de f admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre t0 et t1 vaut l'intégrale de la vitesse : d = ∫[t0,t1] f(t) dt.
- Un retard d'une unité multiplie la transformée de Laplace par e^(-p) : f(t - 1)U(t - 1) a pour transformée F(p)e^(-p).

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les signes et les coefficients de la solution particulière et de l'exponentielle dans l'équation différentielle.
- Pour conclure sur l'arrêt, vérifier si la vitesse atteint zéro, et pas seulement si elle décroît.
- Calculer la primitive aux deux bornes dans le bon ordre et exprimer la distance en mètres.
- Pour le signal retardé, appliquer le facteur e^(-p) et distinguer les intervalles avant et après t = 1.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre une équation différentielle du type y' + ay = b ?

On résout d'abord l'équation homogène y' + ay = 0, dont les solutions sont ke^(-at). On ajoute une solution particulière de l'équation complète, puis on utilise la condition initiale pour déterminer la constante.

Q : Comment calculer la distance parcourue à partir de la vitesse du chariot ?

On intègre la vitesse sur l'intervalle demandé. Si F est une primitive de f, la distance entre t0 et t1 vaut F(t1) - F(t0). On donne ensuite le résultat avec l'unité et l'arrondi demandés.

Q : Comment répartir le temps dans cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et les parties de l'exercice 1 sont indépendantes. Répartissez le temps entre eux, en réservant une marge aux tracés sur document-réponse et à la vérification des unités et des arrondis.

Q : Quels critères de notation faut-il surveiller dans ce sujet ?

Présentez les démarches demandées, justifiez les vérifications et adaptez chaque conclusion à la question. Soyez attentif aux tableaux de variation, aux unités, aux arrondis, aux tracés et au choix unique demandé pour le QCM.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btstm.fr/assets/annales/bts-tm/E2 - Mathématiques/2022/BTS TM - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Traitements des Matériaux : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.