Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - BTS, groupement B

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Vitesse et freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Contrôle de conformité et durée de vie de produits industriels (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btstm.fr/assets/annales/bts-tm/E2 - Mathématiques/2022/BTS TM - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1 -Sujet.pdf

1. Vitesse et freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m·s⁻¹ ralentit sous l'action d'un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction vérifiant une équation différentielle. L'étude porte sur la résolution de cette équation, les variations et la limite de la vitesse, la distance parcourue, un développement limité et la tangente à la courbe.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. **Résoudre l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,8y = 0.**

Le tableau fourni donne les solutions de l'équation homogène sous la forme $y(t) = ke^{-at}$, où a est le coefficient de y et k une constante réelle. Ici, le coefficient vaut $0,8$. On le remplace dans la formule : les solutions sur l'intervalle considéré sont donc les fonctions exponentielles de cette forme, définies pour tout $t \geq 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. **La fonction g est définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.**

La fonction g est constante, donc sa dérivée est nulle : $g'(t) = 0$. En substituant $g(t) = 5$ dans le membre de gauche de l'équation, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Ce résultat est égal au membre de droite de (E), pour tout $t \in [0; +[$. La fonction g vérifie donc bien l'équation différentielle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g'(t) + 0,8g(t) = 4$: g est solution de (E).

Question 1.c. **Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.**

1. Une solution particulière de (E) est la fonction constante $g(t) = 5$, vérifiée à la question précédente.
2. Les solutions de l'équation homogène associée sont $ke^{-0,8t}$, avec k réel.
3. On obtient toutes les solutions de (E) en ajoutant la solution particulière à celles de l'équation homogène.

La somme obtenue est définie sur l'intervalle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. **Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

D'après la question précédente, la solution générale s'écrit $f(t) = ke^{-0,8t} + 5$. À l'instant initial, $e^0 = 1$, donc $f(0) = k + 5$. La condition imposée est $f(0) = 20$, ce qui donne $k + 5 = 20$, puis $k = 15$. En remplaçant la constante par cette valeur dans la solution générale, on obtient l'expression de la vitesse du chariot.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. **Pour f(t) = 15e^(-0,8t) + 5 sur [0 ; +∞[, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.**

La fonction est $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t}$ tend vers zéro. Le produit $15e^{-0,8t}$ tend lui aussi vers zéro, tandis que le terme constant reste égal à 5. Par somme, la limite de $f(t)$ est donc 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +} f(t) = 5$.

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ est finie et vaut 5. Une courbe représentative dont la fonction admet une limite finie en $+\infty$ possède une asymptote horizontale d'ordonnée égale à cette limite. Ici, la courbe C se rapproche donc de la droite horizontale d'équation $y = 5$ lorsque l'abscisse devient très grande.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. **On admet que, pour tout t de [0 ; +∞[, f'(t) = -12e^(-0,8t). Dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.**

Comme $e^{-0,8t} > 0$ pour tout $t \geq 0$, la dérivée $f'(t) = -12e^{-0,8t}$ est strictement négative. Ainsi, f est strictement décroissante sur l'intervalle. Sa valeur initiale est $f(0) = 20$, et sa limite en $+\infty$, déterminée précédemment, est 5. Le tableau résume ces informations.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0;+[$.

Question 3. Le système de freinage permet-il au chariot de s'arrêter ?

Le chariot s'arrêterait si sa vitesse devenait nulle. Or, pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. La vitesse est donc toujours supérieure à 5 et tend vers 5 sans l'atteindre à aucun instant fini. Le freinage ralentit le chariot, mais le modèle ne prévoit pas un arrêt complet.

- Vitesse limite : $5\ \mathrm{m\cdotp s^{-1}}$.
- Vitesse nulle : jamais atteinte.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdotp s^{-1}}$, sans atteindre 0.

Question 4.a. La fonction F est définie sur [0 ; +∞[par F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.

On dérive les deux termes de $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. Par dérivation de l'exponentielle composée, $(e^{-0,8t})' = -0,8e^{-0,8t}$. Ainsi, $F'(t) = -18,75(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est exactement celle de $f(t)$. Par conséquent, F est bien une primitive de f sur $[0;+[$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4.b. La distance parcourue entre les instants t₀ et t₁ est d = ∫ de t₀ à t₁ f(t)dt. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre t₀ = 0 et t₁ = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

1. Par le théorème fondamental de l'analyse, $d = F(1) - F(0)$.
2. En utilisant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75)$.
3. Après simplification, la valeur exacte est $23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. Son évaluation donne environ $15,325$ mètres, soit, arrondie au centimètre, $15,33$ mètres.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \text{m} \approx 15,33\ \text{m}.$

Partie C - Étude locale

Question 1. Question à choix multiples : recopier la seule réponse exacte donnant le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni n'enlève de point.

Le logiciel donne la partie polynomiale du développement limité : $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$, soit $20 - 12t + 4,8t^2$. À l'ordre 2, le reste doit être de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. C'est la troisième proposition qui respecte à la fois les coefficients et la forme correcte du reste.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Troisième réponse : $20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. La valeur initiale fournie est $f(0) = 20$. D'après la dérivée indiquée dans l'énoncé, $f'(0) = -12e^0 = -12$. La tangente passe donc par le point $(0; 20)$ et a pour coefficient directeur -12. En remplaçant ces valeurs dans la formule, on obtient son équation.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = 20 - 12t.$

2. Contrôle de conformité et durée de vie de produits industriels

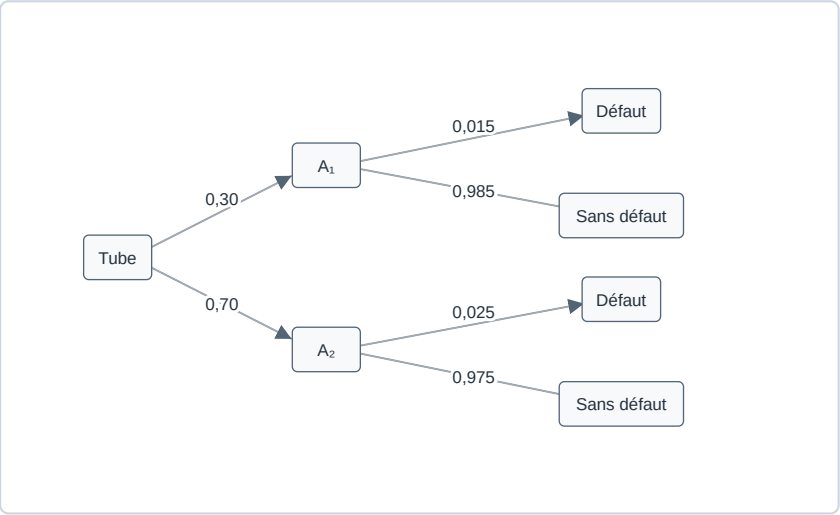
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers, et des contrôles servent à étudier la présence de défauts. L'exercice examine aussi la durée de bon fonctionnement des tubes selon une loi exponentielle, puis estime la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon de 1 000 rivets.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. **L'atelier 1 produit 30 % des tubes et 1,5 % de ses tubes présentent un défaut. L'atelier 2 produit 70 % des tubes et 2,5 % de ses tubes présentent un défaut. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation.**

Le premier niveau distingue les deux ateliers. Depuis chaque atelier, on sépare les tubes défectueux des tubes sans défaut ; les probabilités de ces deux branches totalisent 1.

Arbre pondéré des ateliers et des défauts



Probabilités des ateliers et probabilités conditionnelles de défaut.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Branches : 0,30 et 0,70 ; puis 0,015 / 0,985 depuis A_1 et 0,025 / 0,975 depuis A_2.

Question 2. **Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D) qu'un tube provienne de l'atelier 1 et présente un défaut.**

La probabilité recherchée est le produit de la probabilité d'obtenir un tube de l'atelier 1 par la probabilité conditionnelle qu'il soit défectueux :
$P(A_1 \cap D) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0,0045$, soit 0,45 %.

Question 3. **Montrer que la probabilité qu'un tube prélevé au hasard présente un défaut est P(D). La valeur imprimée 0,0195 porte une correction manuscrite en 0,0220 sur le sujet.**

Les ateliers forment une partition de la production. La formule des probabilités totales donne :

Origine	Calcul de la contribution à P(D)
A_1	$0,30 \times 0,015 = 0,0045$
A_2	$0,70 \times 0,025 = 0,0175$

La somme vaut $0,0220$, ce qui confirme la correction manuscrite de la valeur imprimée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0,0220$, soit 2,20 %.

Question 4. **Sachant que le tube prélevé ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

La probabilité qu'un tube provienne de l'atelier 2 et soit sans défaut vaut $0,70 \times 0,975 = 0,6825$. La probabilité d'absence de défaut est $1 - 0,022 = 0,978$.

On divise la probabilité conjointe par celle de l'absence de défaut : $P(A_2 \mid \overline{D}) = \dfrac{0,6825}{0,978} \approx 0,698$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0,698$, soit environ 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La variable aléatoire T associe à chaque tube sa durée de bon fonctionnement en heures et suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,0001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.**

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$. Ainsi, $E(T) = \dfrac{1}{0,0001} = 10\,000$ heures. Cette espérance représente la durée moyenne de bon fonctionnement d'un tube.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 10\,000$ heures, durée moyenne de bon fonctionnement.

Question 2. **Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement du tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

1. La formule donnée est $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
2. Donc $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0{,}0001 \times 8\,000} \approx 0,5507$, soit 0,55 au centième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T < 8\,000) = 0,55$.

Question 3. **Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement du tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.**

La probabilité de dépasser t est la probabilité complémentaire : $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Ainsi, $P(T > 10\,000) = e^{-0{,}0001 \times 10\,000} = e^{-1} \approx 0,3679$, soit 0,37 au centième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T > 10\,000) = 0,37$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. **Dans un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.**

La fréquence observée des rivets conformes est $\dfrac{975}{1\,000} = 0,975$.

Estimation ponctuelle : $\hat{p} = 0,975$, soit 97,5 %.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\hat{p} = 0,975$, soit 97,5 %.

Question 2. **La fréquence F des rivets conformes dans un échantillon de 1 000 suit la loi normale de moyenne p et d'écart type √(p(1-p)/1000). À l'aide de la formule fournie pour un intervalle de confiance à 95 %, déterminer un intervalle centré sur la fréquence observée pour p et arrondir les bornes à 10^{-3} près.**

La formule fournie s'applique avec la fréquence observée $f = 0,975$ et la taille $n = 1\,000$. La marge d'erreur est $1,96\sqrt{\dfrac{0,975(1-0,975)}{1\,000}} \approx 0,009677$.

Borne	Calcul	Arrondie à 10^{-3}
Inférieure	$0,975 - 0,009677$	0,965
Supérieure	$0,975 + 0,009677$	0,985

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,965\ ;\ 0,985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2022, code 22MATGRB1, d'une durée de 2 heures; coefficient 2, sauf Traitement des matériaux (3). Deux exercices de 10 points étudient le freinage d'un chariot de fête foraine et le contrôle de tubes fluorescents et de rivets. Les compétences évaluées sont les équations différentielles, l'analyse, l'intégration, les probabilités et l'estimation statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = 0 sont de la forme y(t) = ke^(-at).
- Si f(t) = Le^(-at) + c avec a > 0, alors f(t) tend vers c et la courbe admet l'asymptote horizontale y = c.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, E(T) = 1/λ, P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt) et P(T > t) = e^(-λt).
- L'intervalle de confiance à 95 % fourni est [f - 1,96√(f(1-f)/n) ; f + 1,96√(f(1-f)/n)].

Points de vigilance & attentes du jury

- Dans l'équation différentielle, utiliser la condition initiale f(0) = 20 pour déterminer la constante.
- Justifier l'asymptote par la limite et distinguer une vitesse qui tend vers une valeur positive d'une vitesse nulle.
- Pour les probabilités conditionnelles, identifier l'événement conditionnant et inscrire correctement les probabilités sur les branches de l'arbre.
- Pour la loi exponentielle et l'intervalle de confiance, vérifier les unités, la formule utilisée et les arrondis demandés.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du chariot ?

Résoudre d'abord l'équation homogène y' + 0,8y = 0, puis ajouter une solution particulière constante de l'équation complète. Utiliser ensuite la condition f(0) = 20 pour déterminer la constante correspondant à la vitesse initiale.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un tube fonctionne plus de 10 000 heures ?

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, utiliser P(T > t) = e^(-λt). Ici, λ = 0,0001 par heure et t = 10 000 heures. Ne pas confondre cette probabilité de survie avec P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt).

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et les parties de chaque exercice peuvent être traitées indépendamment. Repérer les questions accessibles, répartir le temps entre les deux exercices et garder quelques minutes pour vérifier calculs, unités et arrondis.

Q : Que faire de la valeur de P(D) imprimée dans l'exercice 2 ?

Le sujet indique 0,0195, mais la copie porte une correction manuscrite à 0,0220. Cette dernière valeur est cohérente avec les données des deux ateliers; il faut détailler le calcul à partir des probabilités conditionnelles fournies.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btstm.fr/assets/annales/bts-tm/E2 - Mathématiques/2022/BTS TM - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Traitements des Matériaux : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.